

文章编号: 1000-7598 (2014) 04-1147-10

简谐荷载作用下饱和土体中圆形衬砌隧道 三维动力响应分析

曾 晨^{1,2}, 孙宏磊^{1,2}, 蔡袁强^{1,2,3}, 王 鹏³

(1. 浙江大学 滨海和城市岩土工程研究中心, 杭州 310058; 2. 浙江大学 软弱土与环境土工教育部重点实验室, 杭州 310058;
3. 温州大学 建筑与土木工程学院, 浙江 温州 325035)

摘 要: 研究了全空间饱和土体中圆形衬砌隧道在径向简谐点荷载作用下的三维动力响应, 将衬砌用无限长圆柱壳来模拟, 土体用 Biot 饱和多孔介质模型来模拟, 引入两类势函数来表示土骨架的位移和孔隙水压力, 并利用修正 Bessel 方程来求解各势函数, 结合边界条件, 得到频率-波数域内衬砌和土骨架位移、孔隙水压力的解答, 最后进行 Fourier 逆变换得到时间-空间域内的响应。通过算例分析了荷载振动频率和土体渗透性对土体和衬砌位移响应及土体孔压的影响。结果表明, 饱和土体和弹性土体的位移响应具有明显区别。随着荷载频率的增大, 土体和隧道位移幅值减小, 土体孔压幅值增大; 随着土体渗透性增大, 土体位移及孔压幅值减小。

关 键 词: 简谐点荷载; 衬砌隧道; 饱和土; 动力响应

中图分类号: U 451

文献标识码: A

Analysis of three-dimensional dynamic response of a circular lining tunnel in saturated soil to harmonic loading

ZENG Chen^{1,2}, SUN Hong-lei^{1,2}, CAI Yuan-qiang^{1,2,3}, WANG Peng³

(1. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;
2. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;
3. College of Architecture and Civil Engineering, Wenzhou University, Wenzhou, Zhejiang 325035, China)

Abstract: Three-dimensional dynamic response of a circular lining tunnel surrounded by a full-space saturated soil to a harmonic point load acting in the radial direction is investigated. The lining is modeled as a cylindrical shell of infinite length; and the soil is modeled as a saturated poroelastic medium using Biot's theory. Two kinds of potential functions are introduced to represent the displacements of the soil skeleton and the excess pore fluid pressure; and the modified Bessel equations are utilized to obtain the expressions of the potentials function. According to boundary conditions, the analytical solutions of displacements of lining and soil and pore pressure are derived in frequency-wave number domain. Finally, the time-space domain solutions of the dynamic responses are obtained by inverse Fourier transformation. The effects of load vibration frequency and soil permeability on displacement and pore pressure responses are investigated. Numerical results show that the displacement response of saturated soil is significantly different from that of single phase elastic soil. As the load vibration frequency increasing, the displacement amplitudes of soil and tunnel decrease, while the pore pressure amplitude increases. The displacement and pore pressure amplitudes of soil decrease as the soil permeability getting better.

Key words: harmonic point load; lining tunnel; saturated soil; dynamic response

1 引 言

城市轨道交通具有运量大、安全、快捷、准时等特点, 已成为解决城市交通拥堵的有效措施。随

着世界各地建造地铁的城市迅速增多以及人们对生活环境质量的要求越来越高, 地铁运营引起的环境振动问题已成为一个研究热点, 备受国内外学者关注。

收稿日期: 2013-01-08

基金项目: 国家杰出青年科学基金(No. 51025827); 高等学校博士学科点专项科研基金(No. 20100101110134, No. 20110101120034); 国家自然科学基金青年科学基金(No. 51108414); 浙江省自然科学基金(No. LQ12E08008)。

第一作者简介: 曾晨, 男, 1986 年生, 博士研究生, 主要从事土体动力学方面的研究工作。E-mail: zc860207@163.com

通讯作者: 孙宏磊, 男, 1981 年生, 博士, 副教授, 主要从事土体动力学等方面的研究工作。E-mail: sunhonglei@zju.edu.cn

对于地铁运行引起的环境振动问题,目前已经提出了许多分析模型和计算方法。Chua等^[1]建立了有限元分析二维模型,考虑了地铁-地基土-结构的相互作用,计算分析了一幢银行建筑在地铁振动环境下的动响应;Sheng等^[2]利用离散波数法建立了一个预测模型,用以计算成层土中的圆形衬砌或无衬砌隧道在固定或移动简谐荷载作用下引起的土体动力响应;Gardien等^[3]开发了隧道振动的三维有限元模型,模型中包含3个子模型,考虑了从振动产生到向外传播的整个过程;Forrest等^[4-5]首先提出了Pipe-in-pipe (PiP)模型,并结合双梁无砟轨道模型,用解析的方法研究了全空间中隧道的动力响应问题,考虑了轨道系统、衬砌结构与地层三者的耦合;Degrande等^[6]建立了三维模型用于计算地铁列车引起的自由场振动,用有限元和边界元方法分别模拟隧道和土体,研究了隧道和土体的动力相互作用问题;Gupta等^[7]比较了PiP模型和周期性有限元-边界元耦合模型,两种模型在分析全空间中衬砌隧道的响应问题时,结果具有较好的一致性;刘维宁等^[8]建立车辆-轨道基础-衬砌结构-地层系统的三维有限元振动响应分析模型,对地铁引起地面振动响应进行计算分析;谢伟平等^[9]利用有限元分析了地铁运行引起的土的波动特性,对列车荷载进行了简化,并且考虑了地基土不同性质的影响;和振兴等^[10]将轨道、隧道结构和列车荷载简化后建立三维有限元动力分析模型,计算了列车引起的地面振动,以分析隧道地基弹性模量和隧道埋深对地面振动响应的影响。以上的研究无论采用数值模拟还是解析方法,都是用单相介质模拟土体进行研究的。然而,很多时候地铁隧道埋深较大,在富水地区一般位于地下水位以下,把土体视为饱和两相介质更接近于实际情况。已有的关于移动荷载动力响应的研究表明,当荷载移动速度接近地基Rayleigh波波速时,将饱和土体简化为单相介质将带来较大的误差,无法准确预测荷载引起的振动^[11]。

目前已有一些学者用饱和和多孔介质模型模拟土体,考虑流-固两相的耦合作用,研究隧道与土体的动力相互作用。通过Laplace变换,Senjuntichai等^[12]得到了无限饱和多孔弹性介质中无限长隧道(无衬砌)内表面作用轴对称荷载和流体压力条件下的瞬时响应解答;刘干斌等^[13]引入一种黏弹性本构模型来描述介质的流变和松弛性质,研究了无限黏弹性饱和多孔介质中圆柱孔洞(有衬砌)表面受轴对称简谐荷载和流体压力作用下的频域响应问题;文献^[14]研究了移动的空间轴对称荷载作用下

饱和土中无衬砌隧洞的动力响应,并讨论了移动荷载的移动速度对隧洞动力响应的影响;考虑衬砌与周围饱和土体的不完全连结,Hasheminejad等^[15]研究了轴对称环形移动荷载作用下的无限长圆形衬砌及周围土体的动力响应,并重点分析了衬砌与土体不完全连结的影响;通过引入势函数,黄晓吉等^[16]研究了饱和土中带有衬砌的圆形隧洞在移动环形荷载作用下的动力响应,计算并比较了3种隧洞模型(单相弹性土体隧洞、饱和土体隧洞和饱和土衬砌隧洞)的动力响应。以上研究中虽然将土体视为饱和和多孔介质,但都是在平面应变或者轴对称情况下进行分析,无法研究地铁运行引起的振动及孔压等沿隧道轴向或环向的空间分布和传播规律。显然,采用三维模型模拟地铁荷载作用下的隧道动力响应和土体波动更贴近实际。

本文用无限长圆柱壳来模拟衬砌,用Biot饱和和多孔介质模型^[17-18]来模拟土体,研究了全空间饱和土中圆形衬砌隧洞在径向单位简谐点荷载作用下的三维动力响应。引入两类势函数来表示土骨架的位移和孔隙水压力,并利用修正Bessel方程来求解各势函数,结合边界条件,得到频率-波数域内位移和孔隙水压力的解答,最后进行Fourier逆变换得到时间-空间域内的动力响应。计算了隧道周围土体中一点、隧道仰拱及其下方土体的动力响应,并根据计算结果分析了荷载振动频率和土体渗透性对土体和衬砌位移响应及土体孔压的影响。

2 控制方程及求解

2.1 衬砌结构振动方程

本文采用无限长圆柱壳模拟衬砌,衬砌的三维模型以及所采用的圆柱坐标系统如图1所示,衬砌在轴向 x 、环向 y 、径向 z 的振动方程如下^[4]:

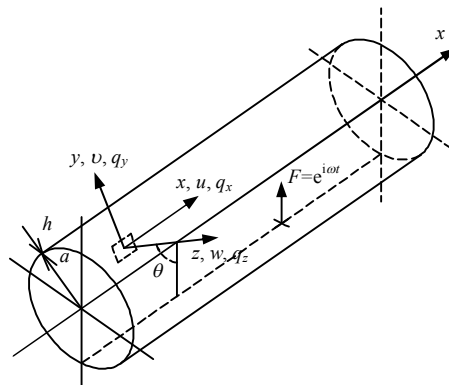


图1 衬砌结构的三维模型

Fig.1 Three-dimensional model for lining

$$\begin{aligned}
& a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \nu \frac{\partial w}{\partial x} + \\
& \frac{h^2}{12} \left(\frac{1-\nu}{2a^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} \right) + \\
& a \frac{1-\nu^2}{Eh} q_x - \rho a \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\
& \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + a \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \\
& \frac{h^2}{12} \left[\frac{3(1-\nu)}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{3-\nu}{2a} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} \right] + a \frac{1-\nu^2}{Eh} q_y - \\
& \rho a \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\
& \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) - \frac{h^2}{12} \left(a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) - \\
& \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{3-\nu}{2a} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{a^3} w + \frac{2}{a^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\
& a \frac{1-\nu^2}{Eh} q_z - \rho a \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \quad (1)$$

式中: E 、 ρ 、 ν 分别为衬砌的弹性模量、密度、泊松比; a 为衬砌壳体中面的半径; h 为衬砌厚度; 环向角度 θ 见图 1; u 、 v 、 w 为衬砌中面沿 x 、 y 、 z 方向的位移; q_x 、 q_y 、 q_z 为衬砌中面沿 x 、 y 、 z 方向的净应力, 等于作用在衬砌内、外表面荷载所产生应力的差值。位移分量及应力分量见图 1。

当作用在无限长圆柱形衬砌的荷载为简谐荷载, 并且荷载作用线位于 $\theta=0^\circ$ 平面内时, 各应力分量为

$$\begin{cases} q_x = \tilde{Q}_{xn} \cos n\theta e^{i(\omega t + \xi x)} \\ q_y = \tilde{Q}_{yn} \sin n\theta e^{i(\omega t + \xi x)} \\ q_z = \tilde{Q}_{zn} \cos n\theta e^{i(\omega t + \xi x)} \end{cases} \quad (2)$$

式 (1) 中的各位移可表示为

$$\begin{cases} u = \tilde{U}_n \cos n\theta e^{i(\omega t + \xi x)} \\ v = \tilde{V}_n \sin n\theta e^{i(\omega t + \xi x)} \\ w = \tilde{W}_n \cos n\theta e^{i(\omega t + \xi x)} \end{cases} \quad (3)$$

式中: $i = \sqrt{-1}$; ω 为角频率; ξ 为波数; $\tilde{Q}_{xn}$ 、 $\tilde{Q}_{yn}$ 、 $\tilde{Q}_{zn}$ ($\tilde{U}_n$ 、 $\tilde{V}_n$ 、 $\tilde{W}_n$) 为应力 (位移) 在环向模态数 n 下的量 (n 为不小于 0 的整数), 而上标“ $\sim$ ”表明这 6 个变量为频率-波数域内的量。

将式 (2)、(3) 带入式 (1), 写成矩阵形式为

$$[A] \begin{Bmatrix} \tilde{U}_n \\ \tilde{V}_n \\ \tilde{W}_n \end{Bmatrix} = \frac{-a(1-\nu^2)}{Eh} \begin{Bmatrix} \tilde{Q}_{xn} \\ \tilde{Q}_{yn} \\ \tilde{Q}_{zn} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

矩阵 $[A]$ 中各元素表达式可参见文献 [4] 中附录 A.1。

2.2 饱和土体运动方程

假定衬砌周围土体为均质饱和和多孔介质, 引入 Biot 波动方程^[17-18]:

$$\begin{cases} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \alpha^2 M + \mu) u_{j,ji} + \alpha M w_{j,ji} = \rho_b \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \\ \alpha M u_{j,ji} + M w_{j,ji} = \rho_f \ddot{u}_i + m \ddot{w}_i + b \dot{w}_i \end{cases} \quad (5)$$

式中: u_i 、 w_i 分别为土骨架位移分量和流体相对于土骨架的位移分量; u_i 、 w_i 上的“ $\cdot$ ”表示对时间 t 求导; λ 、 μ 为土骨架的 Lamé 常数; α 、 M 为土颗粒和孔隙流体压缩性的常数; $b = \eta / k_d$ 为反映黏性耦合的参数, η 、 k_d 分别为流体的动力黏滞系数和土的动力渗透系数; $\rho_b = n_0 \rho_f + (1 - n_0) \rho_s$, n_0 为土体的孔隙率, ρ_f 、 ρ_s 分别为流体密度和土骨架密度; $m = \rho_f / n_0$ 。

均质饱和和多孔介质的本构方程为

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e + 2\mu \varepsilon_{ij} - \alpha \delta_{ij} p_f \\ p_f = -\alpha M e + M \zeta \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\zeta = -w_{i,i}$; σ_{ij} 为土体单元总应力; $e = u_{i,i}$ 为土骨架的体积应变; $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2$ 为土骨架应变; δ_{ij} 为 Kronecker 符号; p_f 为孔隙水压力。

根据 Helmholtz 矢量分解定理, 可以把式 (5) 中土骨架位移 $\mathbf{u}$ 和流体相对于骨架的位移 $\mathbf{w}$ 用标量势和矢量势分别表示为

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{w} = \nabla \chi + \nabla \times \boldsymbol{\Theta} \quad (7)$$

式中: φ 、 $\boldsymbol{\psi}$ 分别为土骨架部分的标量势函数和矢量势函数; χ 、 $\boldsymbol{\Theta}$ 分别为流体部分的标量势函数和矢量势函数。

在稳态情况下, 将式 (7) 代入波动方程 (5), 并将时间因子 $e^{i\omega t}$ 代入计算中, 可以得到两组耦合方程:

$$\begin{bmatrix} \lambda + \alpha^2 M + 2\mu & \alpha M \\ \alpha M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^2 \varphi \\ \nabla^2 \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_b \omega^2 & -\rho_f \omega^2 \\ -\rho_f \omega^2 & -m \omega^2 + i \omega b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^2 \boldsymbol{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_b \omega^2 & -\rho_f \omega^2 \\ -\rho_f \omega^2 & -m \omega^2 + i \omega b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中: ∇^2 为 Laplace 算子。为公式推导简便起见, 这里及下文变量中的时间因子 $e^{i\omega t}$ 均被省略。

由式 (8)、(9) 得到如下的 Helmholtz 方程^[19]:

$$\nabla^2 \varphi_{fs} + k_{fs}^2 \varphi_{fs} = 0 \quad (10)$$

$$\nabla^2 \psi + k_t^2 \psi = 0 \quad (11)$$

式中: k_f 、 k_s 和 k_t 分别代表饱和土中快纵波 (P1 波)、慢纵波 (P2 波) 和横波 (S 波) 的复波数, 并且有

$$k_{fs}^2 = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (12)$$

$$k_t^2 = \frac{C}{D} \quad (13)$$

其中: $A = (\lambda + 2\mu)M$, $B = (\lambda + \alpha^2 M + 2\mu) \cdot (m\omega^2 - ib\omega) + \rho_b \omega^2 M - 2\rho_f \omega^2 \alpha M$, $C = \rho_b \omega^2 (m\omega^2 - ib\omega) - \rho_f^2 \omega^4$, $D = \mu(m\omega^2 - ib\omega)$ 。

利用式 (8)~(13), 经推导整理, 各势函数可表达为

$$\varphi = \varphi_f + \varphi_s, \quad \chi = \mu_f \varphi_f + \mu_s \varphi_s, \quad \theta = \mu_t \psi \quad (14)$$

其中:

$$\mu_{fs} = \frac{(\lambda + \alpha^2 M + 2\mu)k_{fs}^2 - \rho_b \omega^2}{\rho_f \omega^2 - \alpha M k_{fs}^2}, \quad \mu_t = -\frac{\rho_f \omega^2}{m\omega^2 - ib\omega}。$$

衬砌周围的全空间饱和土体三维模型及所采用的圆柱坐标系如图 2 所示, 土体模型的内径为 a (与图 1 中衬砌相匹配), 外径无穷大。在圆柱坐标系 (r, θ, z) 下, 式 (10)、(11) 中 Laplace 算子可表达为^[4]

$$\nabla^2 \varphi_{fs} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{fs}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_{fs}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{fs}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{fs}}{\partial z^2} \quad (15)$$

$$\nabla^2 \psi = \left(\nabla^2 \psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r + \left(\nabla^2 \psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\theta + \nabla^2 \psi_z \mathbf{e}_z \quad (16)$$

式中: $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_z$ 分别为沿圆柱坐标系主方向 r 、 θ 、 z 的单位向量; ψ_r 、 ψ_θ 、 ψ_z 是 ψ 的分量。

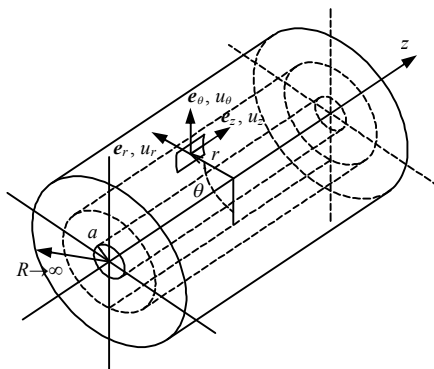


图 2 饱和土体的三维模型

Fig.2 Three-dimensional model for saturated soil

将式 (7) 展开, 再利用式 (14) 有土骨架沿 r 、 θ 、 z 方向的位移分量表达式为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi_f}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi_f}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \\ u_z &= \frac{\partial \varphi_f}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

为了求解 Helmholtz 方程 (10)、(11), 设势函数具备如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_f &= f_1(r) \cos(n\theta) e^{i\xi z} \\ \varphi_s &= f_2(r) \cos(n\theta) e^{i\xi z} \\ \psi_r &= g_r(r) \sin(n\theta) e^{i\xi z} \\ \psi_\theta &= g_\theta(r) \cos(n\theta) e^{i\xi z} \\ \psi_z &= g_z(r) \sin(n\theta) e^{i\xi z} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将式 (15)、(16)、(18) 代入式 (10)、(11), 有

$$\left. \begin{aligned} r^2 f_1'' + r f_1' - [(\xi^2 - k_f^2) r^2 + n^2] f_1 &= 0 \\ r^2 f_2'' + r f_2' - [(\xi^2 - k_s^2) r^2 + n^2] f_2 &= 0 \\ r^2 g_r'' + r g_r' - [(\xi^2 - k_t^2) r^2 + n^2 + 1] g_r + 2n g_\theta &= 0 \\ r^2 g_\theta'' + r g_\theta' - [(\xi^2 - k_t^2) r^2 + n^2 + 1] g_\theta + 2n g_r &= 0 \\ r^2 g_z'' + r g_z' - [(\xi^2 - k_t^2) r^2 + n^2] g_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中的求导符号表示对 r 求导。

利用规范变换不变性, 可以设 $g_\theta = -g_r$, 代入式 (19) 中的第 3 式可得

$$r^2 g_r'' + r g_r' - [(\xi^2 - k_t^2) r^2 + (n+1)^2] g_r = 0 \quad (20)$$

可见式 (19) 中的第 1、2、5 式为 n 阶修正 Bessel 方程, 式 (20) 为 $n+1$ 阶修正 Bessel 方程, 它们的解具有如下形式:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= A_1 I_n(\alpha_1 r) + B_1 K_n(\alpha_1 r) \\ f_2 &= A_2 I_n(\alpha_2 r) + B_2 K_n(\alpha_2 r) \\ g_r &= -g_\theta = A_r I_{n+1}(\beta r) + B_r K_{n+1}(\beta r) \\ g_z &= A_z I_n(\beta r) + B_z K_n(\beta r) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中: $\alpha_1^2 = \xi^2 - k_f^2$, $\alpha_2^2 = \xi^2 - k_s^2$, $\beta^2 = \xi^2 - k_t^2$; I_n 、 K_n 分别为第 1、2 类 n 阶修正 Bessel 函数; A_1 、 B_1 、 A_2 、 B_2 、 A_r 、 B_r 、 A_z 和 B_z 为待定系数。

将式 (18) 中各势函数代入式 (17) 中, 并注意到 $g_\theta = -g_r$, 各位移分量可进一步表达为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \left(f'_1 + f'_2 + i\xi g_r + \frac{n}{r} g_z \right) \cos(n\theta) e^{i\xi z} \\ u_\theta &= \left[-\frac{n}{r} (f_1 + f_2) + i\xi g_r - g'_z \right] \sin(n\theta) e^{i\xi z} \\ u_z &= \left[i\xi (f_1 + f_2) - \frac{n+1}{r} g_r - g'_r \right] \cos(n\theta) e^{i\xi z} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

对本构方程式(6)中的两项 $u_{i,i}$ 、 $w_{i,i}$ 进行如下操作:

$$\begin{aligned} u_{i,i} &= \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 \varphi = \nabla^2 \varphi_f + \nabla^2 \varphi_s = -k_f^2 \varphi_f - k_s^2 \varphi_s, \\ w_{i,i} &= \nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla^2 \chi = \mu_f \nabla^2 \varphi_f + \mu_s \nabla^2 \varphi_s = \\ &\quad -\mu_f k_f^2 \varphi_f - \mu_s k_s^2 \varphi_s \end{aligned} \quad (23)$$

将上两式代入式(6)中,并使用圆柱坐标系下各应变的表达式^[4],有

$$\left. \begin{aligned} p_f &= (\alpha + \mu_f) M k_f^2 \varphi_f + (\alpha + \mu_s) M k_s^2 \varphi_s \\ \sigma_{rr} &= -a_f k_f^2 \varphi_f - a_s k_s^2 \varphi_s + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中: $a_{fs} = \lambda + \alpha M (\alpha + \mu_{fs})$ 。

联立式(18)、(22)、(24),可得

$$\left. \begin{aligned} p_f &= [(\alpha + \mu_f) M k_f^2 f_1 + (\alpha + \mu_s) M k_s^2 f_2] \cos(n\theta) e^{i\xi z} \\ \sigma_{rr} &= \left[-a_f k_f^2 f_1 - a_s k_s^2 f_2 + 2\mu (f_1'' + f_2'') + 2\mu i \xi g_r' + \right. \\ &\quad \left. 2\mu \frac{n}{r} g_z' - 2\mu \frac{n}{r^2} g_z \right] \cos(n\theta) e^{i\xi z} \\ \sigma_{r\theta} &= \left[-2\mu \frac{n}{r} (f_1' + f_2') + 2\mu \frac{n}{r^2} (f_1 + f_2) + \mu i \xi g_r' - \right. \\ &\quad \left. \mu i \xi \frac{n+1}{r} g_r - \mu g_z'' + \frac{\mu}{r} g_z' - \mu \frac{n^2}{r^2} g_z \right] \sin(n\theta) e^{i\xi z} \\ \sigma_{rz} &= \left[2\mu i \xi (f_1' + f_2') - \mu g_r'' - \mu \frac{n+1}{r} g_r' + \right. \\ &\quad \left. \mu \left(\frac{n+1}{r^2} - \xi^2 \right) g_r + \mu i \xi \frac{n}{r} g_z \right] \cos(n\theta) e^{i\xi z} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

修正 Bessel 函数具备如下递推关系^[4]

$$\left. \begin{aligned} I_n'(z) &= (n/z) I_n(z) + I_{n+1}(z) \\ K_n'(z) &= (n/z) K_n(z) - K_{n+1}(z) \\ I_n'(z) &= I_{n-1}(z) - (n/z) I_n(z) \\ K_n'(z) &= -K_{n-1}(z) - (n/z) K_n(z) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

将式(21)分别代入式(22)、(25)中,利用

式(26)进行整理,可得饱和土体的土骨架位移及总应力的矩阵形式为

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix} = [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{U}] \cdot [\mathbf{D}] e^{i\xi z} \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{T}] \cdot [\mathbf{D}] e^{i\xi z} \quad (28)$$

式中: $[\mathbf{D}] = \{A_1 \ B_1 \ A_2 \ B_2 \ A_r \ B_r \ A_z \ B_z\}^T$,
 $[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix}$; $[\mathbf{U}]$ 和 $[\mathbf{T}]$ 均为 3×8 的矩阵。

矩阵 $[\mathbf{U}]_{3 \times 8}$ 中各元素的具体表达式为

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{n}{r} I_n(\alpha_1 r) + \alpha_1 I_{n+1}(\alpha_1 r), \\ u_{12} &= \frac{n}{r} K_n(\alpha_1 r) - \alpha_1 K_{n+1}(\alpha_1 r), \\ u_{13} &= \frac{n}{r} I_n(\alpha_2 r) + \alpha_2 I_{n+1}(\alpha_2 r), \\ u_{14} &= \frac{n}{r} K_n(\alpha_2 r) - \alpha_2 K_{n+1}(\alpha_2 r), \\ u_{15} &= i\xi I_{n+1}(\beta r), \quad u_{16} = i\xi K_{n+1}(\beta r), \\ u_{17} &= \frac{n}{r} I_n(\beta r), \quad u_{18} = \frac{n}{r} K_n(\beta r); \\ u_{21} &= -\frac{n}{r} I_n(\alpha_1 r), \quad u_{22} = -\frac{n}{r} K_n(\alpha_1 r), \\ u_{23} &= -\frac{n}{r} I_n(\alpha_2 r), \quad u_{24} = -\frac{n}{r} K_n(\alpha_2 r), \\ u_{25} &= i\xi I_{n+1}(\beta r), \quad u_{26} = i\xi K_{n+1}(\beta r), \\ u_{27} &= -\frac{n}{r} I_n(\beta r) - \beta I_{n+1}(\beta r), \\ u_{28} &= -\frac{n}{r} K_n(\beta r) + \beta K_{n+1}(\beta r); \\ u_{31} &= i\xi I_n(\alpha_1 r), \quad u_{32} = i\xi K_n(\alpha_1 r), \\ u_{33} &= i\xi I_n(\alpha_2 r), \quad u_{34} = i\xi K_n(\alpha_2 r), \\ u_{35} &= -\beta I_n(\beta r), \quad u_{36} = \beta K_n(\beta r), \\ u_{37} &= 0, \quad u_{38} = 0. \end{aligned}$$

矩阵 $[\mathbf{T}]_{3 \times 8}$ 中各元素的具体表达式为

$$\begin{aligned} t_{11} &= \left[2\mu \left(\frac{n^2 - n}{r^2} + \alpha_1^2 \right) - a_f k_f^2 \right] I_n(\alpha_1 r) - \\ &\quad 2\mu \frac{\alpha_1}{r} I_{n+1}(\alpha_1 r), \\ t_{12} &= \left[2\mu \left(\frac{n^2 - n}{r^2} + \alpha_1^2 \right) - a_f k_f^2 \right] K_n(\alpha_1 r) + \\ &\quad 2\mu \frac{\alpha_1}{r} K_{n+1}(\alpha_1 r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{13} &= \left[2\mu \left(\frac{n^2 - n}{r^2} + \alpha_2^2 \right) - a_s k_s^2 \right] I_n(\alpha_2 r) - \\
&\quad 2\mu \frac{\alpha_2}{r} I_{n+1}(\alpha_2 r), \\
t_{14} &= \left[2\mu \left(\frac{n^2 - n}{r^2} + \alpha_2^2 \right) - a_s k_s^2 \right] K_n(\alpha_2 r) + \\
&\quad 2\mu \frac{\alpha_2}{r} K_{n+1}(\alpha_2 r), \\
t_{15} &= 2\mu i \xi \beta I_n(\beta r) - 2\mu i \xi \frac{n+1}{r} I_{n+1}(\beta r), \\
t_{16} &= -2\mu i \xi \beta K_n(\beta r) - 2\mu i \xi \frac{n+1}{r} K_{n+1}(\beta r), \\
t_{17} &= 2\mu \frac{n^2 - n}{r^2} I_n(\beta r) + 2\mu \frac{n}{r} \beta I_{n+1}(\beta r), \\
t_{18} &= 2\mu \frac{n^2 - n}{r^2} K_n(\beta r) - 2\mu \frac{n}{r} \beta K_{n+1}(\beta r); \\
t_{21} &= -2\mu \frac{n^2 - n}{r^2} I_n(\alpha_1 r) - 2\mu \frac{n}{r} \alpha_1 I_{n+1}(\alpha_1 r), \\
t_{22} &= -2\mu \frac{n^2 - n}{r^2} K_n(\alpha_1 r) + 2\mu \frac{n}{r} \alpha_1 K_{n+1}(\alpha_1 r), \\
t_{23} &= -2\mu \frac{n^2 - n}{r^2} I_n(\alpha_2 r) - 2\mu \frac{n}{r} \alpha_2 I_{n+1}(\alpha_2 r), \\
t_{24} &= -2\mu \frac{n^2 - n}{r^2} K_n(\alpha_2 r) + 2\mu \frac{n}{r} \alpha_2 K_{n+1}(\alpha_2 r), \\
t_{25} &= \mu i \xi \beta I_n(\beta r) - 2\mu i \xi \frac{n+1}{r} I_{n+1}(\beta r), \\
t_{26} &= -\mu i \xi \beta K_n(\beta r) - 2\mu i \xi \frac{n+1}{r} K_{n+1}(\beta r), \\
t_{27} &= \left(-2\mu \frac{n^2 - n}{r^2} - \mu \beta^2 \right) I_n(\beta r) + 2\mu \frac{\beta}{r} I_{n+1}(\beta r), \\
t_{28} &= \left(-2\mu \frac{n^2 - n}{r^2} - \mu \beta^2 \right) K_n(\beta r) - 2\mu \frac{\beta}{r} K_{n+1}(\beta r); \\
t_{31} &= 2\mu i \xi \frac{n}{r} I_n(\alpha_1 r) + 2\mu i \xi \alpha_1 I_{n+1}(\alpha_1 r), \\
t_{32} &= 2\mu i \xi \frac{n}{r} K_n(\alpha_1 r) - 2\mu i \xi \alpha_1 K_{n+1}(\alpha_1 r), \\
t_{33} &= 2\mu i \xi \frac{n}{r} I_n(\alpha_2 r) + 2\mu i \xi \alpha_2 I_{n+1}(\alpha_2 r), \\
t_{34} &= 2\mu i \xi \frac{n}{r} K_n(\alpha_2 r) - 2\mu i \xi \alpha_2 K_{n+1}(\alpha_2 r), \\
t_{35} &= -\mu \frac{n}{r} \beta I_n(\beta r) - \mu (\xi^2 + \beta^2) I_{n+1}(\beta r), \\
t_{36} &= \mu \frac{n}{r} \beta K_n(\beta r) - \mu (\xi^2 + \beta^2) K_{n+1}(\beta r), \\
t_{37} &= \mu i \xi \frac{n}{r} I_n(\beta r), \quad t_{38} = \mu i \xi \frac{n}{r} K_n(\beta r).
\end{aligned}$$

比较式 (27)、(28) 与式 (2)、(3) 可知, 环向模态数 n 下位移 u 和应力 σ 在频率-波数域内的

各分量为

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U}_{rn} \\ \tilde{U}_{\theta n} \\ \tilde{U}_{zn} \end{Bmatrix} = [U] \cdot [D], \quad \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{rmn} \\ \tilde{T}_{r\theta n} \\ \tilde{T}_{rzn} \end{Bmatrix} = [T] \cdot [D] \quad (29)$$

2.3 衬砌结构与饱和土体的相互作用

为了研究隧道衬砌与土体的相互作用, 考虑衬砌与土体之间的边界条件为

(1) 衬砌壳体的应力等于衬砌内、外表面荷载所产生应力的差值;

(2) 衬砌与土体接触面处位移、应力均连续;

(3) 衬砌与土体接触面完全不透水;

(4) 土体在无限远处的位移衰减为 0。

如图 1 所示, 假设衬砌内表面 $x=0$ 、 $\theta=0^\circ$ (仰拱) 处作用一个沿径向 z 的固定单位简谐点荷载, 它在 x 、 y 、 z 方向产生的应力分量为

$$p_x = p_y = 0, \quad p_z = \frac{\delta(x)\delta(\theta)}{a} e^{i\omega t} \quad (30)$$

式中: $\delta(\bullet)$ 为狄拉克 δ 函数。该荷载在频率-波数域内的各应力分量为^[4]

$$\tilde{P}_{xn} = \tilde{P}_{yn} = 0, \quad \tilde{P}_{zn} = \begin{cases} 1/2\pi a, & n=0 \\ 1/\pi a, & n>0 \end{cases} \quad (31)$$

根据第 1 个边界条件, 由式 (4) 有衬砌与土体接触面处为

$$\frac{-Eh}{a(1-\nu^2)} [A] \begin{Bmatrix} \tilde{U}_n \\ \tilde{V}_n \\ \tilde{W}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{Q}_{xn} \\ \tilde{Q}_{yn} \\ \tilde{Q}_{zn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{P}_{xn} \\ \tilde{P}_{yn} \\ \tilde{P}_{zn} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{xzn} \\ \tilde{T}_{zyn} \\ \tilde{T}_{zzn} \end{Bmatrix}_{\text{outside}} \quad (32)$$

式中: $\tilde{T}_{xzn}$ 、 $\tilde{T}_{zyn}$ 、 $\tilde{T}_{zzn}$ 为土体作用在衬砌外表面的应力分量。

注意到图 1、2 所采用圆柱坐标系的主方向并不完全一致, 根据第 2 个边界条件, 比较两图可得

$$\left. \begin{aligned} u &\equiv u_z, \quad v \equiv u_\theta, \quad w \equiv -u_r \\ \sigma_{zx} &\equiv -\sigma_{rz}, \quad \sigma_{zy} \equiv -\sigma_{r\theta}, \quad \sigma_{zz} \equiv \sigma_{rr} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

式中: σ_{zx} 、 σ_{zy} 、 σ_{zz} 为图 1 坐标体系下的应力, 它们各自在频率-波数域内对应的量即为式 (32) 中的 $\tilde{T}_{xzn}$ 、 $\tilde{T}_{zyn}$ 、 $\tilde{T}_{zzn}$ 。

文献[4]已经说明当 $r \rightarrow \infty$ 时, $I_n(\bullet) \rightarrow \infty$ 而 $K_n(\bullet) \rightarrow 0$, 根据第 4 个边界条件, 式 (27)、(28) 中 I_n 和 I_{n+1} 的系数应为 0, 即

$$A_1 = A_2 = A_r = A_z = 0 \quad (34)$$

同时利用式 (33)、(34), 可得衬砌与土体接触

面处的位移、应力为

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U}_n \\ \tilde{V}_n \\ \tilde{W}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{U}_{zn} \\ \tilde{U}_{\theta n} \\ -\tilde{U}_{rn} \end{Bmatrix}_{r=a} = \begin{Bmatrix} u_{32} & u_{34} & u_{36} & u_{38} \\ u_{22} & u_{24} & u_{26} & u_{28} \\ -u_{12} & -u_{14} & -u_{16} & -u_{18} \end{Bmatrix}_{r=a} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_r \\ B_z \end{Bmatrix} = [U_\infty]_{r=a} \cdot [F] \quad (35)$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{T}_{zn} \\ \tilde{T}_{\theta n} \\ \tilde{T}_{zn} \end{Bmatrix}_{\text{outside}} = \begin{Bmatrix} -\tilde{T}_{zn} \\ -\tilde{T}_{\theta n} \\ \tilde{T}_{rn} \end{Bmatrix}_{r=a} = \begin{Bmatrix} -t_{32} & -t_{34} & -t_{36} & -t_{38} \\ -t_{22} & -t_{24} & -t_{26} & -t_{28} \\ t_{12} & t_{14} & t_{16} & t_{18} \end{Bmatrix}_{r=a} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_r \\ B_z \end{Bmatrix} = [T_\infty]_{r=a} \cdot [F] \quad (36)$$

将式 (35)、(36) 代入式 (32) 中, 有

$$\frac{-Eh}{a(1-\nu^2)} [A] [U_\infty]_{r=a} \cdot [F] = \begin{Bmatrix} \tilde{P}_{zn} \\ \tilde{P}_{\theta n} \\ \tilde{P}_{zn} \end{Bmatrix} - [T_\infty]_{r=a} \cdot [F] \quad (37)$$

结合式 (34), 展开式 (25) 中 p_f 的表达式得

$$\begin{cases} p_f = [G_0] \cdot [F] \cdot \cos(n\theta) e^{i\xi z} \\ \frac{\partial p_f}{\partial r} = [G] \cdot [F] \cdot \cos(n\theta) e^{i\xi z} \end{cases} \quad (38)$$

式中: 环向模态数 n 下孔压 p_f 在频率-波数域内的量为 $\tilde{P}_{fn}$; $[G_0]$ 及 $[G]$ 均为 1×4 的矩阵。

矩阵 $[G_0]_{1 \times 4}$ 、 $[G]_{1 \times 4}$ 中各元素的具体表达式为

$$\begin{aligned} g_{011} &= M(\alpha + \mu_f) k_f^2 K_n(\alpha_1 r), \\ g_{012} &= M(\alpha + \mu_s) k_s^2 K_n(\alpha_2 r), \\ g_{013} &= 0, \quad g_{014} = 0; \\ g_{11} &= M(\alpha + \mu_f) k_f^2 \left[\frac{n}{r} K_n(\alpha_1 r) - \alpha_1 K_{n+1}(\alpha_1 r) \right], \\ g_{12} &= M(\alpha + \mu_s) k_s^2 \left[\frac{n}{r} K_n(\alpha_2 r) - \alpha_2 K_{n+1}(\alpha_2 r) \right], \\ g_{13} &= 0, \quad g_{14} = 0. \end{aligned}$$

根据第3个边界条件, 即 $\left. \frac{\partial p_f}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$, 有

$$[G]_{r=a} \cdot [F] = 0 \quad (39)$$

联立式 (37)、(39), 有

$$\begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_r \\ B_z \end{Bmatrix} = [F] = \begin{bmatrix} \frac{-Eh}{a(1-\nu^2)} [A] \cdot [U_\infty]_{r=a} + [T_\infty]_{r=a} \\ [G]_{r=a} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{P}_{zn} \\ \tilde{P}_{\theta n} \\ \tilde{P}_{zn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (40)$$

再通过式 (35)、(38) 第1式, 得到不同环向模态数 n 下 $r=R$ ($R \geq a$) 处的位移、孔压为

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U}_{zn} \\ \tilde{U}_{\theta n} \\ -\tilde{U}_{rn} \\ \tilde{P}_{fn} \end{Bmatrix}_{r=R} = \begin{bmatrix} [U_\infty]_{r=R} \\ [G_0]_{r=R} \end{bmatrix} \cdot [F] \quad (41)$$

最后, 进行 Fourier 逆变换, 可得饱和土体中点 (r, θ, z) 处在时间-空间域内的土骨架位移分量、孔压表达式为

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ p_f \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_{rn} \cos n\theta \\ \tilde{U}_{\theta n} \sin n\theta \\ \tilde{U}_{zn} \cos n\theta \\ \tilde{P}_{fn} \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\xi z} d\xi \cdot e^{i\omega t} \quad (42)$$

注意当 $r=a$ 时, u_r 、 u_θ 、 u_z 同时也表示衬砌中面的位移。

3 算例和分析

在本文算例中的荷载振动频率 $f = \omega / (2\pi)$, 取单位点荷载的最大振动频率为 80 Hz^[7]。计算结果中 U_r 、 U_θ 、 U_z 和 P_f 分别表示式 (42) 中土骨架的径向、环向、轴向位移和孔压的幅值。

为验证本文模型的正确性, 将饱和土体退化为单相介质土体 (ρ_f 、 b 、 α 、 M 、 m 取 10^{-4}), 其余参数同文献[4], 计算点 ($r=20$ m, $\theta=90^\circ$, $z=0$) 处的位移与文献[4]中相应点的位移进行对比, 对比结果见图 3。从图可以看出, 二者结果吻合较好, 验证了本文方法的正确性。

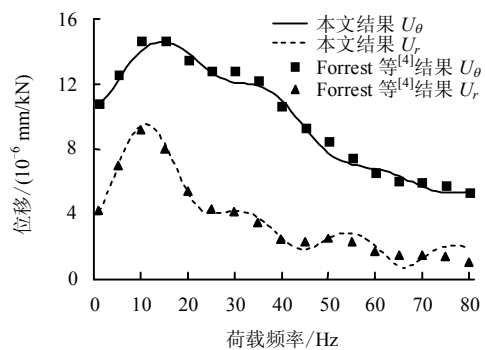


图3 本文与 Forrest 等^[4]的结果对比
Fig.3 Comparisons between present work and Forrest's work

接下来的算例中所采用的各模型参数见表 1, 其中衬砌参数从文献[4]选取, 部分饱和土体参数从文献[20]选取。

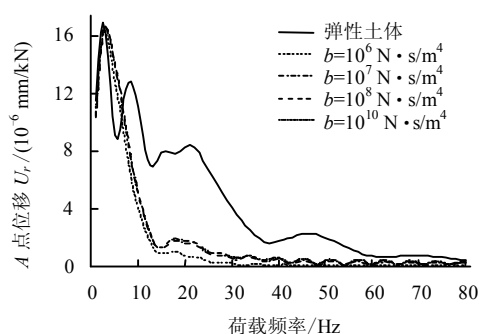
图 4 给出了土体 b 值不同时, 衬砌周围饱和土

体中 A 点 ($r = 20 \text{ m}$, $\theta = 90^\circ$, $z = 20 \text{ m}$) 的位移幅值随荷载振动频率 f 变化的曲线。为了比较, 图 4 中还给出了单相弹性土体 (泊松比取 0.3) 中对应的位移曲线。

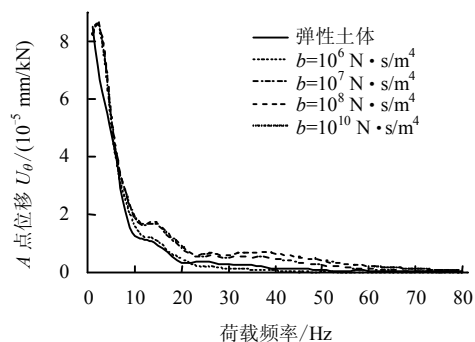
表 1 模型计算参数

Table 1 Model parameters for calculation

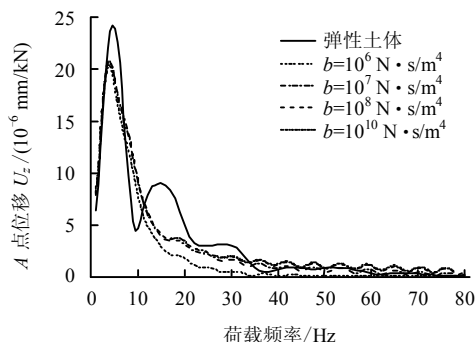
衬砌参数					饱和土体参数						
E/MPa	$\rho/(\text{g/cm}^3)$	ν	a/m	h/m	λ/MPa	μ/MPa	$\rho_t/(\text{g/cm}^3)$	$\rho_s/(\text{g/cm}^3)$	n_0	α	M/MPa
5×10^4	2.5	0.3	3	0.25	30	20	1.00	2.60	0.4	1.0	5×10^3
					$b/(\text{N} \cdot \text{s/m}^4)$						
					$10^6 \sim 10^{10}$						



(a) A 点径向位移 U_r



(b) A 点环向位移 U_θ



(c) A 点轴向位移 U_z

图 4 不同 b 值时 A 点位移幅值随荷载振动频率变化的曲线
Fig.4 Displacement amplitude of point A varied with load vibration frequency under different b

首先分析图 4 中饱和土体中 A 点的响应, 可以看到, A 点各位移幅值分量 U_r 、 U_θ 、 U_z 曲线均在频率较低时达到最大峰值, 然后迅速下降; 并且在到达峰值前, 不同 b 值时的各位移分量曲线都几乎

重合。而当频率 f 超过最大峰值频率后, 随着土体 b 值的增大 (土体渗透性变差), 各位移分量均有所增大, 但增大的趋势逐渐减小。 $b = 10^8 \text{ N} \cdot \text{s/m}^4$ 时的各分量曲线与 $b = 10^{10} \text{ N} \cdot \text{s/m}^4$ 时的各曲线基本接近, 若 $b > 10^{10} \text{ N} \cdot \text{s/m}^4$, 各曲线将不再随 b 值增大而增大, 这说明当衬砌周围土体为渗透性较差的黏性土时, b 值的变化对土体位移响应的影响很小。 A 点的位移分量 U_θ 要明显大于分量 U_r 、 U_z 。比较图 4(a)、(c), U_r 、 U_z 曲线表现出的变化规律非常相似, 数值大小也较为接近, 这可能与 A 点距离荷载作用点的轴向和径向距离相等 ($r = z = 20 \text{ m}$) 有关。

频率 $f > 20 \text{ Hz}$ 之后, 饱和土中 A 点的位移分量曲线均出现有规律的波动, 波动周期都接近 6 Hz , 产生这种波动的原因是土体中弹性波的干涉。衬砌各断面的振动都对 A 点的响应均有贡献, 其中荷载作用点处的影响最大。 A 点距离荷载作用点 28.4 m , 在 b 值较大的情况下取土体 P_1 波波速近似等于文献[20]中完全无渗流时的 P_1 波波速 270 m/s , 按照文献[4]给出的近似计算方法可得波动周期为 $270/(2 \times 28.4) = 4.8 \text{ Hz}$, 与 6 Hz 较为接近。说明 $f > 20 \text{ Hz}$ 之后, 由衬砌传播到 A 点的 P_2 、 S 波已大幅衰减, P_1 波占主导, 因此, U_θ 曲线表现出的波动性较小 (U_θ 方向与 P_1 波传播方向接近垂直)。

比较图 4 中饱和土体与弹性土体的响应, 两种土体中 A 点各位移幅值曲线的波动规律各异, 相互之间的大小存在明显差别。由于 U_θ 要远大于 U_r 、 U_z , 根据图 4(b) 可知, 当 $b > 10^7 \text{ N} \cdot \text{s/m}^4$, A 点在饱和土体中的位移响应要大于其在弹性土体中的响应。因此, 当土体渗透性较差时, 若采用弹性模型来模拟隧道周围土体, 将低估土体的响应水平。可见在富水地区研究地铁作用下隧道周围土体动力响应问题时, 应引入更接近实际情况的饱和多孔介质模型。

图 5 给出了 $b = 10^8 \text{ N} \cdot \text{s/m}^4$, 荷载频率 f 取不同值时, 衬砌隧道仰拱 ($r = a = 3 \text{ m}$, $\theta = 0^\circ$) 的位

移幅值沿轴向坐标 z 的分布曲线, $z=0$ 处恰好为荷载作用点的位置。隧道仰拱处的环向坐标 $\theta=0^\circ$, 因此, 环向位移分量 $U_\theta=0$ 。 U_r 的值要比 U_z 的值大许多, 仰拱处的位移主要是沿着径向的。由图 5(a) 可以看到, 随着与荷载作用点距离的增大, U_r 曲线从最大值迅速减小, 降低到一定程度后开始出现一些轻微的起伏。随着 f 值的增大, U_r 值呈逐渐减小的趋势。图 5(b) 中, 仰拱处的位移 U_z 从 0 迅速增大到峰值, 之后逐渐减小。各 U_z 曲线的峰值以及峰值对应的 z 值均随 f 值的增大而减小。

图 6 给出了荷载频率 $f=65$ Hz 时, b 值的变化对仰拱下方土体孔压幅值 P_f 沿 z 分布的影响, 由图可见, 孔压 P_f 随着 z 值的增大而减小。 P_f 随着 b 值的增大而增大, 而增大的趋势逐渐减小, $b=10^8$ N·s/m⁴ 时的 P_f 与 $b=10^{10}$ N·s/m⁴ 时的 P_f 已基本接近, 当衬砌周围土体为黏性土体时, b 值的变化对孔压的影响很小。

图 7 给出了 $b=10^8$ N·s/m⁴ 时, f 值的变化对仰拱下方土体孔压幅值 P_f 沿 z 分布的影响。各 P_f 曲线从最大值迅速减小, 之后出现波动, f 值越小波动越早趋于平稳。 P_f 随着 f 值的增大而增大, 尤其在 $z < 10$ m 时显著增大。因此, 当隧道内作用荷载的振动频率较高时, 荷载作用点附近土体中会产生较大的孔压。

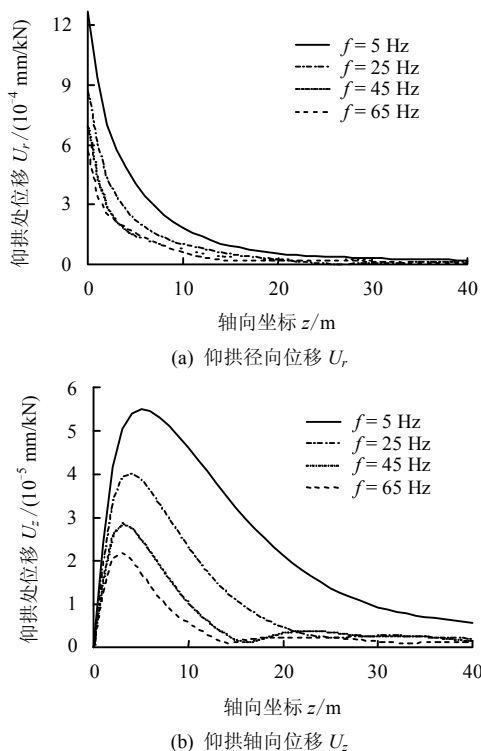


图 5 不同荷载频率时隧道仰拱的位移幅值沿 z 的分布曲线
Fig.5 Displacement amplitude of tunnel invert varied with z under different load frequencies

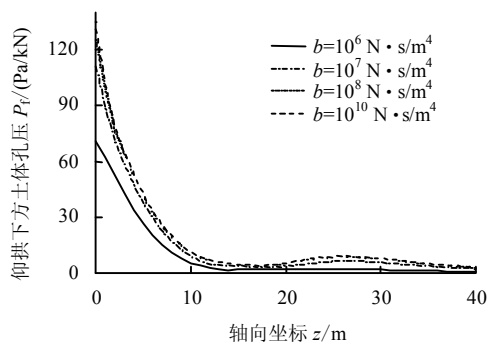


图 6 不同 b 值时仰拱下方土体的孔压幅值沿 z 的分布曲线
Fig.6 Pore water pressure amplitude of soil beneath tunnel invert varied with z under different b

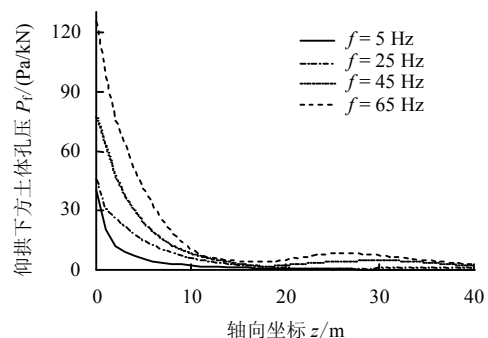


图 7 不同荷载频率时仰拱下方土体的孔压幅值沿 z 的分布曲线
Fig.7 Pore water pressure amplitude of soil beneath tunnel invert varied with z under different load frequencies

4 结 论

(1) 饱和土体和弹性土体的位移响应区别明显, 在富水地区研究地铁作用下隧道周围土体动力响应问题时, 应引入更接近实际情况的饱和多孔介质模型来模拟土体。

(2) 荷载振动频率较低时, 饱和土土骨架位移幅值几乎不受 b 值变化的影响; 之后土体位移幅值随 b 值的增大而增大, 但增大的趋势逐渐减小。当衬砌周围土体为渗透性较差的黏性土时, b 值的变化对土体位移响应的影响很小。

(3) 随着荷载振动频率的增大, 土体和隧道位移幅值呈现明显减小的趋势, 而土体孔压幅值逐渐增大。

(4) 孔压幅值随 b 值的增大而增大, 增大趋势逐渐减小。当隧道内作用荷载的振动频率较高时, 荷载作用点附近土体中会产生较大的孔压。

参 考 文 献

- [1] CHUA K H, LO K W, BALENDRA T. Building response due to subway train traffic[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1995, 121(11): 747—754.

- [2] SHENG X, JONES C J C, THOMPSON D J. Ground vibration generated by a harmonic load moving in a circular tunnel in a layered ground[J]. **Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control**, 2003, 22(2): 83—96.
- [3] GARDIEN W, STUIT H G. Modelling of soil vibrations from railway tunnels[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2003, 267(3): 605—619.
- [4] FORREST J A, HUNT H E M. A three-dimensional tunnel model for calculation of train-induced ground vibration[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2006, 294(4): 678—705.
- [5] FORREST J A, HUNT H E M. Ground vibration generated by trains in underground tunnels[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2006, 294(4): 706—736.
- [6] DEGRANDE G, CLOUTEAU D, OTHMAN R, et al. A numerical model for ground-borne vibrations from underground railway traffic based on a periodic finite element- boundary element formulation[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2006, 293(3—5): 645—666.
- [7] GUPTA S, HUSSEIN M F M, DEGRANDE G, et al. A comparison of two numerical models for the prediction of vibrations from underground railway traffic[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2007, 27(7): 608—624.
- [8] 刘维宁, 夏禾, 郭文军. 地铁列车振动的环境响应[J]. 岩石力学与工程学报, 1996, 15(增刊): 586—593.
LIU Wei-ning, XIA He, GUO Wen-jun. Study of vibration effects of underground trains on surrounding environments[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 1996, 15(Supp.): 586—593.
- [9] 谢伟平, 孙洪刚. 地铁运行时引起的土的波动分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(7): 1180—1184.
XIE Wei-ping, SUN Hong-gang. FEM analysis of wave propagation in soils induced by high speed train loads[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2003, 22(7): 1180—1184.
- [10] 和振兴, 翟婉明, 罗震. 地铁列车引起的地面振动[J]. 西南交通大学学报, 2008, 43(2): 218—221, 247.
HE Zhen-xing, ZHAI Wan-ming, LUO Zhen. Ground vibration caused by moving metro trains[J]. **Journal of Southwest Jiaotong University**, 2008, 43(2): 218—221, 247.
- [11] 孙宏磊, 蔡袁强, 陈成振. 列车荷载作用下路轨系统及饱和弹性半空间上覆盖土层的动力响应[J]. 岩土工程学报, 2009, 32(6): 922—928.
SUN Hong-lei, CAI Yuan-qiang, CHEN Cheng-zhen. Dynamic response of railways to layered half-space subjected to moving train load[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2009, 32(6): 922—928.
- [12] SENJUNTICHA T, RAJAPAKSE R K N D. Transient response of a circular cavity in a poroelastic medium[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1993, 17(6): 357—383.
- [13] 刘干斌, 谢康和, 施祖元. 黏弹性饱和多孔介质中圆柱孔洞的频域响应[J]. 力学学报, 2004, 36(5): 557—563.
LIU Gan-bin, XIE Kang-he, SHI Zu-yuan. Frequency response of a cylindrical cavity in poro-viscoelastic saturated medium[J]. **Acta Mechanica Sinica**, 2004, 36(5): 557—563.
- [14] LU Jian-fei, JENG Dong-sheng. Dynamic response of a circular tunnel embedded in a saturated poroelastic medium due to a moving load[J]. **Journal of Vibration and Acoustics**, 2006, 128(6): 750—756.
- [15] HASHEMINEJAD S M, KOMEILI M. Effect of imperfect bonding on axisymmetric elastodynamic response of a lined circular tunnel in poroelastic soil due to a moving ring load[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2009, 46(2): 398—411.
- [16] 黄晓吉, 扶名福, 徐斌. 移动环形荷载作用下饱和土中圆形衬砌隧洞动力响应研究[J]. 岩土力学, 2012, 33(3): 892—898.
HUANG Xiao-ji, FU Ming-fu, XU Bin. Dynamic response of a circular lining tunnel in saturated soil due to moving ring load[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2012, 33(3): 892—898.
- [17] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range[J]. **Journal of the Acoustical Society of America**, 1956, 28(2): 168—178.
- [18] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. High-frequency range[J]. **Journal of the Acoustical Society of America**, 1956, 28(2): 179—191.
- [19] CAI Y Q, DING G Y, Xu C J. Amplitude reduction of elastic waves by a row of piles in poroelastic soil[J]. **Computers and Geotechnics**, 2009, 36(3): 463—473.
- [20] SHI Li, SUN Hong-lei, CAI Yuan-qiang, et al. Validity of fully drained, fully undrained and u - p formulations for modeling a poroelastic half-space under a moving harmonic point load[J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2012, 42: 292—301.